

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου, τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Μονάδες 5

B. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Μονάδες 10

Γ. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ», τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Αν για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ ισχύει $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, τότε $\vec{u} = \vec{v}$.
- ii. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τότε είναι παράλληλο και στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.
- iii. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$, τότε $0 < \left(\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}, \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \right) < \frac{\pi}{2}$.
- iv. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε $|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- v. Αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα, τότε $\text{proj}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \vec{0}$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία A (2,5), B (1,2), Γ (5,12).

- a. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{BG}, \vec{AG}$.
- b. Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.
- c. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{AB} - 2\vec{BG}$.

- d. Να βρείτε το μέσο M του $B\Gamma$ και να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$.
- e. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\angle B\hat{A}\Gamma$ είναι αμβλεία.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$, $\vec{\beta} = (-2, 6)$ και $\vec{\gamma} = (3, 1)$.

- a. Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$.

Μονάδες 3

- b. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι παράλληλα.

Μονάδες 3

- c. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 6

- d. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 6

B. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}$ και $\vec{v} = \vec{\beta} - \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha}$. Να

αποδείξετε ότι $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$.

Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, για τα οποία ισχύει:

$$4|\vec{\alpha}|^2 \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}$$

- a. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.
- b. Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$ ή $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.
- c. Αν $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$, με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $(\vec{x} - 2\vec{\alpha}) \perp (\vec{x} + \vec{\beta})$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{x}$.

Μονάδες 15

B. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και οι προβολές E, Z του Δ πάνω στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{B\Gamma}^2$$

Μονάδες 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 41.

B. Σχολικό βιβλίο σελίδα 42.

Γ. i. Λ

ii. Σ

iii. Λ

iv. Λ

v. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

a. $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$, $\overrightarrow{BG} = (4, 10)$, $\overrightarrow{AG} = (3, 7)$

b. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}) = 2 \neq 0$, άρα $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{BG}$ και συνεπώς τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

c. $\vec{v} = (-11, -29)$

d. M(3, 7) και $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{5}$

e. Είναι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = -24 < 0$, οπότε η γωνία B $\hat{A}$ G είναι αμβλεία.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. a. $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0$, οπότε $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$

b. $\det(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = 5 \neq 0$, οπότε $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\gamma}$

c. $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$, με $\vec{\alpha}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \parallel \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \perp \vec{\alpha}_1$

d. $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$

$$B. \vec{u} \cdot \vec{\alpha} = [(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}] \cdot \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}) - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})(\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}) = 0$$

$$\text{και } \vec{v} \cdot \vec{\alpha} = \left(\vec{\beta} - \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha} \right) \cdot \vec{\alpha} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha}^2 = 0$$

Οπότε $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$ και $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$A. \quad a. \vec{\alpha} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{4|\vec{\alpha}|^2} \vec{\beta}, \text{ άρα } \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

b. Από (a) είναι $\vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε από υπόθεση, έχουμε:

$$4|\vec{\alpha}|^2 \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \lambda \vec{\alpha}) \lambda \vec{\alpha} \Leftrightarrow 4|\vec{\alpha}|^2 \vec{\alpha} = \lambda^2 |\vec{\alpha}|^2 \vec{\alpha} \stackrel{\vec{\alpha} \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

Άρα $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$ ή $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

$$c. (\vec{x} - 2\vec{\alpha}) \perp (\vec{x} + \vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{x} - 2\vec{\alpha}) \cdot (\vec{x} + \vec{\beta}) = 0 \stackrel{(Y)}{\Leftrightarrow} (\vec{x} - 2\vec{\alpha}) \cdot (\vec{x} + 2\vec{\alpha}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}^2 - (2\vec{\alpha})^2 = 0 \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{x}| = 2|\vec{\alpha}| \stackrel{(Y)}{\Leftrightarrow} |\vec{x}| = 4$$

$$B. \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA} = (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BG}^2$$