

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Τι λέμε ν-οστή ρίζα (ν: θετικός ακέραιος) ενός μη αρνητικού αριθμού α.
(4 μονάδες)

2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να δείξετε ότι: $\sqrt[n]{\alpha} \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$
(4 μονάδες)

3. Αν $\alpha \geq 0$ να δείξετε ότι: $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n^2]{\alpha}$
(3 μονάδες)

B.1. Έστω η εξίσωση $x^n = \alpha$ (1), ν θετικός ακέραιος. Να αντιστοιχίσετε τις προϋποθέσεις για την εξίσωση που βρίσκονται στη στήλη Α με τις ρίζες της εξίσωσης (1) που βρίσκονται στη στήλη Β.

Στήλη Α Προϋποθέσεις για α και ν	Στήλη Β Ρίζες της (1)
A. $\alpha < 0$ και ν, άρτιος	1. $\sqrt[n]{\alpha}$
B. $\alpha < 0$ και ν, περιττός	2. $\pm \sqrt[n]{\alpha}$
Γ. $\alpha > 0$ και ν, άρτιος	3. 1
Δ. $\alpha > 0$ και ν, περιττός	4. $-\sqrt[n]{ \alpha }$
	5. καμία

(8 μονάδες)

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

β. Αν $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt[2n]{\alpha^{2n} \beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}$

γ. $\sqrt{x^2} = x$

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

A.i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$(1 - 3\sqrt{2})^2 \text{ και } (1 + 3\sqrt{2})^2$$

(9 μονάδες)

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 + 6\sqrt{2}}$$

(7 μονάδες)

B. Να γράψετε τις παραστάσεις με τη βοήθεια μιας ρίζας.

i) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ ii) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ iii) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

(9 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$ (1)

(10 μονάδες)

B. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $6x^2 - x - 1 = 0$ ii. $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ iii. $x(x-1) = -1$

(15 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x+1| + |x-1| - 1$

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

(5 μονάδες)

ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

(5 μονάδες)

ii) Από τη γραφική παράσταση της f να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(5 μονάδες)

B. Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = |\lambda - 1|x - \lambda$ και $\varepsilon_2 : y = 2x + \lambda - 6$ να είναι παράλληλες.

(10 μονάδες)

ΟΙ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΘΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΙΣΤΙΟΣΕΛΙΔΑ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ ΜΑΣ

www.apolito.gr

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1, A.2, A.3 Θεωρία σχολικού

B.1 A: 5

B: 4

Γ: 2

Δ: 1

B.2 α: Λ

β: Λ

γ: Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\begin{aligned} \text{A. i) Έχουμε: } (1 - 3\sqrt{2})^2 &= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \\ &= 1 - 6\sqrt{2} + 9 \cdot 2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{ομοίως } (1 + 3\sqrt{2})^2 = 1 + 6\sqrt{2} + 9 \cdot 2 = 19 + 6\sqrt{2}$$

ii) Αντικαθιστούμε στη παράσταση A τις παραστάσεις

$19 - 6\sqrt{2}, 19 + 6\sqrt{2}$ από το ερώτημα i και έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{(1 - 3\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 + 3\sqrt{2})^2} \\ &= |1 - 3\sqrt{2}| - |1 + 3\sqrt{2}| = -1 + 3\sqrt{2} - 1 - 3\sqrt{2} = -2 \end{aligned}$$

επειδή $1 - 3\sqrt{2} < 0$ και $1 + 3\sqrt{2} > 0$

$$\text{B. Είναι: i. } \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\text{ii. } \sqrt{3\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{54}} = \sqrt[3]{54^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[6]{54}$$

$$\text{iii. } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{8 \cdot 9} = \sqrt[6]{72}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Η διακρίνουσα της (1) είναι:

$$\Delta = \left[-(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right]^2 + 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 > 0.$$

Οπότε η εξίσωση της (1) έχει ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} \pm (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2} = \sqrt{3},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2}$$

B. i) Η εξίσωση $6x^2 - x - 1 = 0$ είναι της μορφής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{με } \alpha = 6, \beta = -1, \gamma = -1$$

$$\text{Είναι: } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25 > 0.$$

$$\text{Οπότε } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 5}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12}$$

$$x_1 = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα η εξίσωση έχει ρίζες τις: } x_1 = -\frac{1}{3} \text{ και } x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii) Έχουμε: } -4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (1)$$

1^{ος} τρόπος

$$(1) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Η διακρίνουσα της (1) είναι: } \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$$

$$\text{οπότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή, την: } x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii) Είναι: } x(x-1) = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Η διακρίνουσα της (1) είναι: } \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε η (1) έχει πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4^ο

A. i) Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

Είναι: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ και $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Τα πρόσημα των παραστάσεων $x+1$ και $x-1$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+

Άρα:

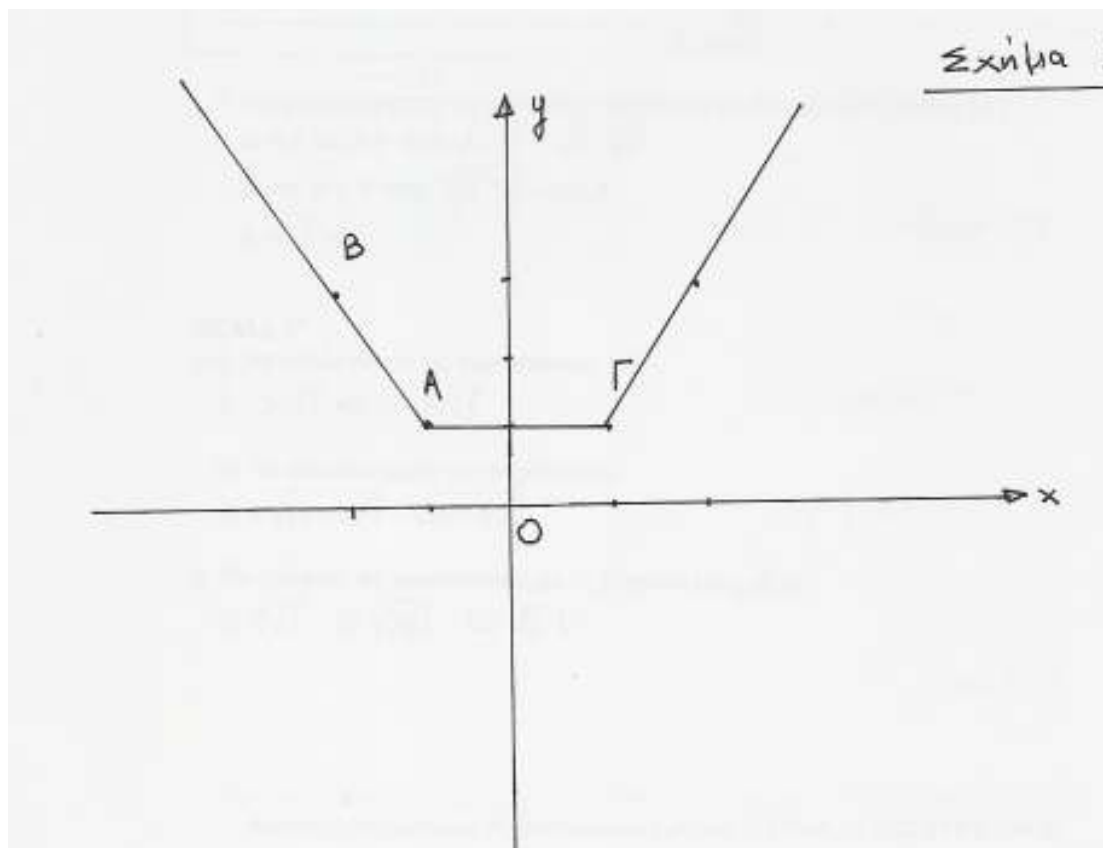
- Αν $x \leq -1$ τότε $f(x) = -(x+1) - (x-1) - 1 = -x-1-x+1-1 = -2x-1$
- Αν $-1 < x < 1$ τότε $f(x) = x+1 - (x-1) - 1 = x+1-x+1-1 = 1$
- Αν $x \geq 1$ τότε $f(x) = x+1 + x-1 - 1 = 2x-1$

$$\text{Οπότε: } f(x) = \begin{cases} -2x-1, & \text{αν } x \leq -1 \\ 1, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 2x-1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

ii) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από

- την ημιευθεία $y = -2x-1, x \leq -1$ με αρχή το σημείο $A(-1, f(-1))$ ή $A(-1, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, f(-2))$ ή $B(-2, 3)$.
- Το τμήμα $y = 1, -1 < x < 1$ εκτός των άκρων του $A(-1, 1)$ και $\Gamma(1, 1)$.
- Την ημιευθεία $\Gamma(1, 1)$ που διέρχεται από το σημείο $\Delta(2, f(2))$ ή $\Delta(2, 3)$

όπως έχουμε στο Σχήμα 1



iii) Το σύνολο των τιμών είναι το $f(A) = [1, +\infty)$

B. Για αν είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ θα πρέπει να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης και να τέμνουν τον άξονα $y'y$ σε διαφορετικά σημεία.

$$\text{Δηλαδή: } \begin{cases} |\lambda - 1| = 2 \\ -\lambda \neq \lambda - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 2 \\ 2\lambda \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Σχόλιο: για $\lambda = 3$ οι δύο ευθείες ταυτίζονται

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ