

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha - \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta + 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma$$

Μονάδες 6

Β. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i. $(3\alpha + \beta)^2$ ii. $(\gamma^2 - 4\delta)^3$ iii. $\left(5x^3 + \frac{7y}{4}\right)\left(5x^3 - \frac{7y}{4}\right)$

Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ», τις παρακάτω προτάσεις:

i. Για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει $(-1)^n = 1$

ii. Αν $\alpha = 2$, τότε $(\alpha^\alpha)^{\alpha^\alpha} = 256$

iii. Ισχύει $(x - y)^2 = (y - x)^2$

iv. Αν $xy \neq 0$, τότε $x \neq 0$ ή $y \neq 0$

v. Η ανίσωση $0x \geq -2009$ είναι αδύνατη

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3(2 - 3x) - 4x = -2(2x + 5) - 11$

β) $2x - \frac{4x+1}{6} = \frac{2x-1}{2} + \frac{x-1}{3}$

γ) $\frac{9x-1}{9x^2-1} - \frac{1}{3x-1} = \frac{2}{3x+1}$

Μονάδες 15

B. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x , για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$4(x-1) - 3(x+2) < 3(x-2) \quad \text{και} \quad \frac{x+8}{12} < \frac{x+1}{3} - \frac{5x-16}{6}$$

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

A. i) Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2007} \right)^2 - \left(\frac{2007}{2008} - \frac{2008}{2007} \right)^2$$

Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\alpha\beta + 2)^2 \leq (\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 1)$

ii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2(\alpha - 2\beta) - 5$

Μονάδες 10

Γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x}$.

Στη συνέχεια να γράψετε την παράσταση σε απλούστερη μορφή.

Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Α. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , να λύσετε την εξίσωση:

$$\lambda(\lambda x - 1) + 2\lambda x = -3 + 15x$$

Μονάδες 13

Β. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\lambda^2(x - 2) + 1 = \lambda x - \lambda^2 \quad (1) \quad \text{και} \quad x + \lambda^2 = \lambda^2 x - \lambda \quad (2)$$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, να δείξετε ότι η εξίσωση (2) είναι αδύνατη.

Μονάδες 12

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΚΩΣΤΑΚΗΣ ΛΑΜΠΡΟΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

A. Είναι:

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta - \gamma)^2 &= \\&= (\alpha - \beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma) = \\&= \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\alpha + \beta^2 + \beta\gamma - \gamma\alpha + \gamma\beta + \gamma^2 = \\&= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta + 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma\end{aligned}$$

B. i. Είναι:

$$(3\alpha + \beta)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2$$

ii. Είναι:

$$(\gamma^2 - 4\delta)^3 = \gamma^6 - 12\gamma^4\delta + 48\gamma^2\delta^2 - 64\delta^3$$

iii. Είναι:

$$\left(5x^3 + \frac{7y}{4}\right)\left(5x^3 - \frac{7y}{4}\right) = 25x^6 - \frac{49y^2}{16}$$

Γ. i. ΛΑΘΟΣ (αν ν περιττός $(-1)^ν = -1$)

ii. ΣΩΣΤΟ $\left((2^2)^{2^2} = 2^{2 \cdot 2^2} = 2^8 = 256\right)$

iii. ΣΩΣΤΟ $\left((x - y)^2 = [-(y - x)]^2 = (y - x)^2\right)$

iv. ΛΑΘΟΣ (αν $xy \neq 0$, τότε $x \neq 0$ και $y \neq 0$)

v. ΛΑΘΟΣ (η ανίσωση $0x \geq -2009$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x)

Θέμα 2^ο

A. α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}3(2-3x)-4x &= -2(2x+5)-11 \\6-9x-4x &= -4x-10-11 \\-9x-4x+4x &= -6-10-11 \\-9x &= -27 \\x &= 3\end{aligned}$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}2x - \frac{4x+1}{6} &= \frac{2x-1}{2} + \frac{x-1}{3} \\6 \cdot 2x - 6 \cdot \frac{4x+1}{6} &= 6 \cdot \frac{2x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x-1}{3} \\12x - (4x+1) &= 3(2x-1) + 2(x-1) \\12x - 4x - 1 &= 6x - 3 + 2x - 2 \\12x - 4x - 6x - 2x &= 1 - 3 - 2 \\0x &= -4\end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Είναι $\frac{9x-1}{9x^2-1} - \frac{1}{3x-1} = \frac{2}{3x+1} \Leftrightarrow \frac{9x-1}{(3x-1)(3x+1)} - \frac{1}{3x-1} = \frac{2}{3x+1}$

Για $x \neq \frac{1}{3}$ και $x \neq -\frac{1}{3}$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{9x-1}{(3x-1)(3x+1)} - \frac{1}{3x-1} = \frac{2}{3x+1}$$

$$(3x-1)(3x+1) \frac{9x-1}{(3x-1)(3x+1)} - (3x-1)(3x+1) \frac{1}{3x-1} = (3x-1)(3x+1) \frac{2}{3x+1}$$

$$9x-1-(3x+1) = (3x-1)2$$

$$9x-1-3x-1 = 6x-2$$

$$9x-3x-6x = 1+1-2$$

$$0x = 0$$

Άρα η εξίσωση αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x , με $x \neq \frac{1}{3}$

και $x \neq -\frac{1}{3}$.

B. - Για την πρώτη ανίσωση έχουμε ισοδύναμα:

$$4(x-1) - 3(x+2) < 3(x-2)$$

$$4x-4-3x-6 < 3x-6$$

$$4x-3x-3x < 4+6-6$$

$$-2x < 4$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2}$$

$$x > -2$$

- Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{x+8}{12} < \frac{x+1}{3} - \frac{5x-16}{6}$$

$$12 \frac{x+8}{12} < 12 \frac{x+1}{3} - 12 \frac{5x-16}{6}$$

$$x+8 < 4(x+1) - 2(5x-16)$$

$$x+8 < 4x+4-10x+32$$

$$x-4x+10x < -8+4+32$$

$$7x < 28$$

$$x < 4$$

Παρατηρούμε ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $-2 < x < 4$ και επειδή ο x είναι ακέραιος έχουμε:

$$x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3$$

Θέμα 3^ο

A. i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = \\ & = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ & = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = \\ & = 4\alpha\beta \end{aligned}$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i), για $\alpha = \frac{2007}{2008}$ και $\beta = \frac{2008}{2007}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2007} \right)^2 - \left(\frac{2007}{2008} - \frac{2008}{2007} \right)^2 = \\ &= 4 \frac{2007}{2008} \cdot \frac{2008}{2007} = \\ &= 4 \end{aligned}$$

B. i) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta + 2)^2 \leq (\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 1) \\ & \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta + 4 \leq \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + 4\beta^2 + 4 \\ & \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta + 4 - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - 4\beta^2 - 4 \leq 0 \\ & 4\alpha\beta - \alpha^2 - 4\beta^2 \leq 0 \\ & -(-4\alpha\beta + \alpha^2 + 4\beta^2) \leq 0 \\ & -(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2) \leq 0 \\ & -(\alpha - 2\beta)^2 \leq 0, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

ii) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2(\alpha - 2\beta) - 5$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha - 4\beta - 5$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 4\beta + 5 \geq 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 4\beta + 4 + 1 \geq 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 + 4\beta + 4 \geq 0$$

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Γ. - Πρέπει $x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$

- Για $x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$, έχουμε:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{x(x-1)} = x-3$$

Θέμα 4^ο

A. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\lambda(\lambda x - 1) + 2\lambda x = -3 + 15x$$

$$\lambda^2 x - \lambda + 2\lambda x = -3 + 15x$$

$$\lambda^2 x + 2\lambda x - 15x = \lambda - 3$$

$$(\lambda^2 + 2\lambda - 15)x = \lambda - 3$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 5)x = \lambda - 3$$

- Αν $\lambda \neq 3 \text{ και } \lambda \neq -5$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{\lambda - 3}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} = \frac{1}{\lambda + 5}$$

- Αν $\lambda = 3$, τότε $0x = 0$, που είναι αόριστη

- Αν $\lambda = -5$, τότε $0x = -8$, που είναι αδύνατη

B. - Για την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα:

$$\lambda^2(x-2)+1=\lambda x-\lambda^2$$

$$\lambda^2x-2\lambda^2+1=\lambda x-\lambda^2$$

$$\lambda^2x-\lambda x=2\lambda^2-1-\lambda^2$$

$$(\lambda^2-\lambda)x=\lambda^2-1$$

$$\lambda(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα όταν:

$$(\lambda(\lambda-1)=0 \text{ και } (\lambda-1)(\lambda+1)=0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda=0 \text{ ή } \lambda=1) \text{ και } (\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=1$$

- Η εξίσωση (2) για $\lambda=1$, γίνεται ισοδύναμα:

$$x+1^2=1^2x-1$$

$$x+1=x-1$$

$$x-x=-1-1$$

$$0x=-2, \text{ που είναι αδύνατη}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΛΥΣΕΩΝ

ΚΩΣΤΑΚΗΣ ΛΑΜΠΡΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ