

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1^ο

A. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α ;

Μονάδες 6

B. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i. $2\alpha + 3\beta^2$ ii. $\gamma^2 - 2\delta^3$ iii. $3x^3 + 4y^4$ $3x^3 - 4y^4$

Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ», τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 > 0$
- ii. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = \beta = 0$
- iii. Ισχύει $-1^{2011} = -1^{2010}$
- iv. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^4 = \beta^4$
- v. Ισχύει $-\alpha - \beta^2 = \alpha + \beta^2$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $K = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x - 2y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$

β) $\Lambda = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta}{2\alpha^2 - 4\alpha} : \frac{4\alpha^2 - 4\beta^2}{2\alpha^2 - 8}$

$$\gamma) M = \frac{\alpha^3 - \alpha}{\alpha^2 - 2\alpha} \cdot \frac{\alpha^3 - 4\alpha}{\alpha^4 - 1}$$

Μονάδες 15

B. Αν $x < y < z$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

$$\alpha) |x - y| - |x - z| + |z - y|$$

$$\beta) ||x - y| - |x - z|| - |z - y|$$

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

A. Αν ισχύει $3 < x < 5$ και $2 < y < 8$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

$$i) 3x + 5y + 10$$

$$ii) 2x^2 - y^2$$

$$ii) 1 + \frac{x}{y}$$

Μονάδες 15

B. Για τους αριθμούς x και y ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad 2y - x = 5$$

i) Να βρείτε τους αριθμούς x και y .

ii) Αν $x = -2$ και $y = 4$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{x^2 y^{-3}^{-2} x^{-1} y^3^{-4} xy^4}{x^3 y^{-1}^{-3}}$$

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

A. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\alpha^2 + \beta^2 \geq \alpha + \beta^2$

ii) $\alpha^2 + 4\beta^2 + 1 \geq \alpha\beta + 2^2$

Μονάδες 12

B. Αν ισχύει $y \cdot x^3 + y = x \cdot y^3 + x$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y είναι ίσοι ή αντίθετοι ή αντίστροφοι.

Μονάδες 13

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΚΩΣΤΑΚΗΣ ΛΑΜΠΡΟΣ

ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 37.

B. i. $2\alpha + 3\beta^2 = 4\alpha^2 + 12\alpha\beta + 9\beta^2$

ii. $\gamma^2 - 2\delta^3 = \gamma^6 - 6\gamma^4\delta + 12\gamma^2\delta^2 - 8\delta^3$

iii. $3x^3 + 4y^4 \quad 3x^3 - 4y^4 = 9x^6 - 16y^8$

Γ. i. Λ

ii. Σ

iii. Σ

iv. Λ

v. Σ

Θέμα 2ο

A. α) $K = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x - 2y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x + y}{2} \cdot \frac{x - y}{x - y} \cdot \frac{x + y}{x + y} = \frac{x + y}{2}$

β) $\Lambda = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta}{2\alpha^2 - 4\alpha} : \frac{4\alpha^2 - 4\beta^2}{2\alpha^2 - 8} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2 - \beta^2} =$

$$= \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 2} \cdot \frac{\alpha - 2}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha + 2}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha + 2}{\alpha + \beta}$$

γ) $M = \frac{\alpha^3 - \alpha}{\alpha^2 - 2\alpha} \cdot \frac{\alpha^3 - 4\alpha}{\alpha^4 - 1} = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^2 + 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \cdot \frac{\alpha + 2}{\alpha^2 + 1} =$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \cdot \frac{\alpha + 2}{\alpha + 2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$$

B. α) $|x-y| - |x-z| + |z-y| = y-x - z-x + z-y = y-x-z+x+z-y = 0$

β) $||x-y| - |x-z|| - |z-y| = |y-x - z-x| - z-y = |y-x-z+x| - z+y =$
 $= z-y - z+y = z-y-z+y = 0$

Θέμα 3ο

A. i) Έχουμε:

- $3 < x < 5 \Leftrightarrow 9 < 3x < 15 \quad \cdot 3$
- $2 < y < 8 \Leftrightarrow 10 < 5y < 40 \quad \cdot 5$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις 1 και 2 προκύπτει:

$$19 < 3x + 5y < 55 \Leftrightarrow 29 < 3x + 5y + 10 < 65 \quad +10$$

ii) Έχουμε:

- $3 < x < 5 \Leftrightarrow 9 < x^2 < 25 \Leftrightarrow 18 < x^2 < 50 \quad \cdot 2$
υψώνω στο τετράγωνο
- $2 < y < 8 \Leftrightarrow 4 < y^2 < 64 \Leftrightarrow -4 < -y^2 < -64 \Leftrightarrow -64 < -y^2 < -4 \quad \cdot -1$
υψώνω στο τετράγωνο

Προσθέτοντας κατά μέλη τις 3 και 4 προκύπτει:

$$-46 < 2x^2 - y^2 < 46$$

iii) Έχουμε:

- $3 < x < 5 \quad \cdot 5$
- $2 < y < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \quad \cdot 6$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις 5 και 6 προκύπτει:

$$\frac{3}{8} < \frac{x}{y} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{11}{8} < 1 + \frac{x}{y} < \frac{7}{2}$$

B. i) $x^2 + y^2 = 4 \quad 2y - x - 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 4x + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2^2 + y - 4^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ και } y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ και } y = 4$$

ii)
$$\frac{x^2 y^{-3}^{-2} x^{-1} y^3^{-4} x y^4}{x^3 y^{-1}^{-3}} = \frac{x^{-4} y^6 x^4 y^{-12} x y^4}{x^{-9} y^3} = \frac{x^{10}}{y^5} = \frac{-2^{10}}{4^5} = 1$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. i) $2\alpha^2 + \beta^2 \geq \alpha + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

ii) $\alpha^2 + 4\beta^2 + 1 \geq \alpha\beta + 2^2 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + 4\beta^2 + 4 \geq \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta + 4$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha - 2\beta^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

B. $y x^3 + y = x y^3 + x \Leftrightarrow yx^3 + y^2 = xy^3 + x^2 \Leftrightarrow xy x^2 - y^2 - x^2 - y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 xy - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y x + y xy - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ ή } x = -y \quad xy = 1$$

Άρα οι αριθμοί x και y είναι ίσοι ή αντίθετοι ή αντίστροφοι.