

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο

A. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$, με ρίζες x_1, x_2 . Να αποδείξετε ότι:

- i. $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{a}$
- ii. $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$

B. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ» τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Για κάθε $\kappa \in R$, ισχύει $\sqrt{\kappa^2} = \kappa$.
- ii. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, τότε ισχύει $\sqrt[3]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta}$.
- iii. Αν η εξίσωση $\alpha x = \beta$ είναι αδύνατη, τότε και η εξίσωση $\beta x = \alpha$ είναι αδύνατη.
- iv. Αν $x^2 < 25$, τότε $x \in (-5, 5)$.
- v. Οι αριθμοί $\sqrt{2} - 1$ και $\sqrt{2} + 1$ είναι αντίστροφοι.

Θέμα 2ο

A. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$2 - 2(2x + 1) < 6 - 2x \leq 5 - \frac{8x - 7}{3}$$

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{x}{x^2 - 9}$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1 - 3|x - 4|}{2} = -4$$

Θέμα 3ο

A. Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\lambda^2(x-1) = 2(2x+\lambda) \quad (1)$$

$$\lambda^2(x-1) + \lambda(5x-2) = -2(1+3x) \quad (2)$$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, να δείξετε ότι η εξίσωση (2) είναι αδύνατη.

B. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x-2)^2 < 3x-8$$

Θέμα 4ο

A. Να λύσετε την ανίσωση:

$$||3x-2|-5| < 4$$

B. Δίνεται ο αριθμός:

$$\rho = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

- i. Να αποδείξετε ότι $\rho < 0$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $\rho^2 = 2$.
- iii. Να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{2011}{1-\rho}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

Καλή επιτυχία!!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 66.

B.

- i. Λ
- ii. Λ
- iii. Λ
- iv. Σ
- v. Σ

Θέμα 2ο

A. Είναι:

$$2 - 2(2x + 1) < 6 - 2x \leq 5 - \frac{8x - 7}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2(2x + 1) < 6 - 2x \\ \text{και} \\ 6 - 2x \leq 5 - \frac{8x - 7}{3} \end{cases}$$

Όμως:

- $2 - 2(2x + 1) < 6 - 2x \Leftrightarrow x > -3$
- $6 - 2x \leq 5 - \frac{8x - 7}{3} \Leftrightarrow x \leq 2$

Άρα $x \in (-3, 2]$ και επειδή $x \in \mathbb{Z}$, οι ζητούμενες τιμές του x είναι οι: $-2, -1, 0, 1, 2$.

B. Για $x \neq -3, 0, 3$, είναι:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 + 3x} + \frac{2}{x^2 - 3x} &= \frac{x}{x^2 - 9} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{x(x + 3)} + \frac{2}{x(x - 3)} &= \frac{x}{(x + 3)(x - 3)} \\ \Leftrightarrow 2(x - 3) + 2(x + 3) &= x \cdot x \\ \Leftrightarrow 2x - 6 + 2x + 6 &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ (απορρίπτεται)} \text{ ή } x = 4 \text{ (δεκτή)} \end{aligned}$$

Άρα $x = 4$.

Τηλ./Fax.: 210-6219712, Τηλ: 210-6218894 www.apolito.gr – e-mail: info@apolito.gr

Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

Γ. Είναι:

$$\frac{1-3|x-4|}{2} = -4 \Leftrightarrow 1-3|x-4| = -8 \Leftrightarrow |x-4| = 3$$
$$\Leftrightarrow (x-4=3 \text{ ή } x-4=-3) \Leftrightarrow (x=7 \text{ ή } x=1)$$

Θέμα 3ο

Α. Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \lambda^2 x - \lambda^2 = 4x + 2\lambda$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)x = \lambda(\lambda + 2)$$

Η (1) είναι ταυτότητα για $\lambda = -2$, οπότε η (2) γίνεται:

$$(-2)^2(x-1) + (-2)(5x-2) = -2(1+3x)$$
$$\Leftrightarrow 4x - 4 - 10x + 4 = -2 - 6x$$
$$\Leftrightarrow 0x = -2, \text{ που είναι αδύνατη}$$

Β. Είναι:

$$(x-2)^2 < 3x-8$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 3x - 8$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 < 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-4) < 0$$
$$\Leftrightarrow 3 < x < 4$$

Θέμα 4ο

Α. Είναι:

$$||3x-2|-5| < 4 \Leftrightarrow -4 < |3x-2|-5 < 4$$
$$\Leftrightarrow 1 < |3x-2| < 9 \Leftrightarrow \begin{cases} |3x-2| > 1 \\ \text{και} \\ |3x-2| < 9 \end{cases}$$

Όμως:

- $|3x - 2| > 1 \Leftrightarrow (3x - 2 < -1 \text{ ή } 3x - 2 > 1) \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{3} \text{ ή } x > 1\right)$
- $|3x - 2| < 9 \Leftrightarrow -9 < 3x - 2 < 9 \Leftrightarrow -7 < 3x < 11 \Leftrightarrow \frac{-7}{3} < x < \frac{11}{3}$

Άρα $x \in \left(\frac{-7}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(1, \frac{11}{3}\right)$.

B. i) Είναι:

$$\begin{aligned}\rho &< 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3 - \sqrt{5}} &< \sqrt{3 + \sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} &< 3 + \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{5} &< \sqrt{5}, \text{ που ισχύει}\end{aligned}$$

ii) Είναι:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \left(\sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{3 - \sqrt{5}}\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \left(\sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)^2 \\ &= 3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} + 3 + \sqrt{5} \\ &= 6 - 2\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= 6 - 2\sqrt{9 - 5} \\ &= 2\end{aligned}$$

iii) Είναι (από ii):

$$\rho^2 = 2 \Leftrightarrow (\rho = -\sqrt{2} \text{ ή } \rho = \sqrt{2})$$

Όμως $\rho < 0$ (από i), άρα $\rho = -\sqrt{2}$.

Για $\rho = -\sqrt{2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{2011}{1-\rho} &= \frac{2011}{1+\sqrt{2}} = \frac{2011(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{2011(1-\sqrt{2})}{1^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{2011(1-\sqrt{2})}{1-2} = 2011(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$