

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1^ο

A. Τι ονομάζουμε ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ;

Μονάδες
5

B. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$, όπου $\alpha, \beta \geq 0$.

Μονάδες 5

Γ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i. $d(\alpha, \beta) =$

ii. $\sqrt{\alpha^2} =$

iii. $\sqrt[n]{\alpha^m} =$

iv. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} =$

v. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} =$

Μονάδες 5

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή Λ αν είναι λανθασμένες:

i. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

ii. $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$

iii. $\frac{18\sqrt{48}}{\sqrt{54}} = 12\sqrt{2}$

iv. $|\pi - 10| = 10 - \pi$

v. $|\sqrt{3} - 2| = \sqrt{3} - 2$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Αν $1 < x < 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

Μονάδες 8

B. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3}$.

Μονάδες 9

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$.

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση: $|2 - x| = 2x + 2$.

Μονάδες 12

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\lambda x + 9 = 3x + \lambda^2$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^2}{x^2 - 9} - \frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{3}{x} + \frac{21}{x^3 - 9x}$.

Μονάδες 12

B. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-1|}{2}$.

Μονάδες 13

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

A. Ορισμός, σελ. 70

B. Απόδειξη 1, σελ. 71

Γ.

i. $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

ii. $\sqrt{\alpha^2} = |a|$

iii. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

iv. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$

v. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Δ.

i. Λ

ii. Σ

iii. Σ

iv. Σ

v. Λ

Θέμα 2^ο

A. Αφού $1 < x < 2$, έχουμε: $1 < x \Rightarrow x - 1 > 0$ και $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$. Άρα:

$$A = |x - 1| - |x - 2| = x - 1 - (2 - x) = x - 1 - 2 + x = 2x - 3$$

B. Έχουμε:

$$\sqrt{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3 \cdot 4]{3^4} = \sqrt[3]{3}$$

$$\Gamma. (x+1)^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[(x+1) + (x-1)] = 0 \Leftrightarrow (x+1)2x = 0 \Leftrightarrow (x+1=0 \text{ ή } x=0) \Leftrightarrow (x=-1 \text{ ή } x=0)$$

Θέμα 3^ο

A. Πρέπει: $2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -1$. Τότε έχουμε:

$$(2 - x = 2x + 2 \text{ ή } 2 - x = -2x - 2)$$

$$\Leftrightarrow (-2x - x = 2 - 2 \text{ ή } 2x - x = -2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow (-3x = 0 \text{ ή } x = -4)$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = -4)$$

Επειδή όμως $x \geq -1$, η λύση $x = -4$ απορρίπτεται. Οπότε: $x = 0$.

B. Έχουμε:

$$\lambda x + 9 = 3x + \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda x - 3x = \lambda^2 - 9 \Leftrightarrow (\lambda - 3)x = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

• $\lambda - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$. Τότε:

$$(\lambda - 3)x = (\lambda - 3)(\lambda + 3) \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 3)x}{(\lambda - 3)} = \frac{(\lambda - 3)(\lambda + 3)}{(\lambda - 3)} \Leftrightarrow x = \lambda + 3$$

• $\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Τότε: $3x + 9 = 3x + 3^2 \Leftrightarrow 3x - 3x = 9 - 9 \Leftrightarrow 0x = 0$,

που είναι αόριστη!

Θέμα 4^ο

A. Έχουμε:

$$\frac{x^2}{x^2 - 9} - \frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{3}{x} + \frac{21}{x^3 - 9x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x-3)(x+3)} - \frac{1}{x(x-3)} = \frac{3}{x} + \frac{21}{x(x-3)(x+3)} \quad (1)$$

Πρέπει: $(x-3 \neq 0 \text{ και } x+3 \neq 0 \text{ και } x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow (x \neq 3 \text{ και } x \neq -3 \text{ και } x \neq 0)$$

Τηλ./Fax.: 210-6219712, Τηλ.: 210-6218894 www.apolito.gr – e-mail: info@apolito.gr

Λεωφόρος Μαραθώνος & Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, 14565 Άγιος Στέφανος

$$(1) \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) \frac{x^2}{(x-3)(x+3)} - x(x-3)(x+3) \frac{1}{x(x-3)} = x(x-3)(x+3) \frac{3}{x} + x(x-3)(x+3) \frac{21}{x(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot x^2 - (x+3) = (x-3)(x+3) \cdot 3 + 21$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - 3 = 3x^2 - 27 + 21$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - 3x^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1=0 \text{ ή } x+1=0 \text{ ή } x-3=0)$$

$$\Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=3)$$

Και επειδή, λόγω περιορισμού $x \neq 3$, οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$x=1, x=-1$$

Β. Έχουμε:

1^η περίπτωση: $x \in (-\infty, -1)$. Τότε:

$$K = \frac{-x-1-x+1}{2} = \frac{-2x}{2} = -x$$

2^η περίπτωση: $x \in [-1, 1]$. Τότε:

$$K = \frac{x+1-x+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

3^η περίπτωση: $x \in (1, +\infty)$

$$K = \frac{x+1+x-1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$\text{Άρα: } K = \frac{|x+1| + |x-1|}{2} = \begin{cases} -x, & \alpha \nu x \in (-\infty, -1) \\ 1, & \alpha \nu x \in [-1, 1] \\ x, & \alpha \nu x \in (1, +\infty) \end{cases}$$