

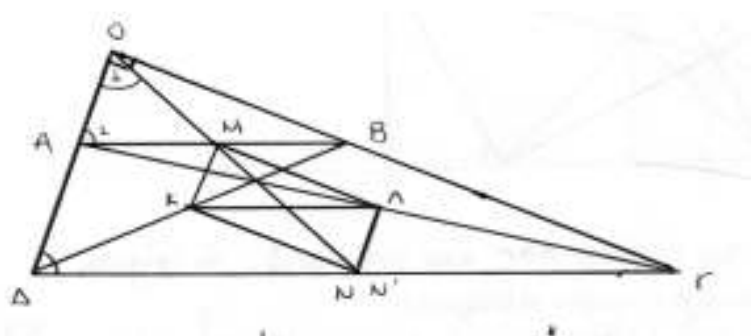
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Άσκηση 1^η

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) που οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ,ΒΓ τέμνονται κάθετα στο Ο. Αν Μ,Ν τα μέσα των βάσεων ΑΒ,ΓΔ αντίστοιχα να δείξετε ότι :

- Τα σημεία Ο,Μ,Ν συνευθειακά.
- $MN = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2}$
- Αν Κ,Λ μέσα των διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ αντίστοιχα, τότε το ΚΜΛΝ είναι ορθογώνιο.

Λύση:



- Έστω ότι η ΟΜ τέμνει τη ΓΔ στο Ν'
 - Στο ορθογώνιο
 $OAB : OM \text{ διάμεσος} \Rightarrow OM = \frac{AB}{2} = AM \Rightarrow OAM \text{ τρίγωνο ισοσκελές} \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{A}_1$
 - $AB // \Gamma\Delta \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}$ (εντός, εκτός κ επιτ'αυτά) $\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{\Delta} \Rightarrow$
 $ON'\Delta \text{ τρίγωνο ισοσκελές} \Rightarrow ON' = \Delta N' \quad (1)$
 $\text{Όμοια } OMB \text{ ισοσκελές τρίγωνο} \Rightarrow ON'\Gamma \text{ ισοσκελές τρίγωνο} \Rightarrow ON' = N'\Gamma \quad (2)$
 Από (1) και (2) $\Delta N' = N'\Gamma \Rightarrow N' \text{ μέσο } \Gamma\Delta \Rightarrow N' \equiv N$
 Άρα Ο,Μ, Ν συνευθειακά.

$$ii. \left. \begin{array}{l} OM = \frac{AB}{2} \text{ (διάμεσος } OAB) \\ ON = \frac{\Gamma\Delta}{2} \text{ (διάμεσος } O\Delta\Gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow MN = ON - OM \Rightarrow MN = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \quad (3)$$

- Στο τρίγωνο ΑΔΒ : Μ, Κ μέσα ΑΒ, ΒΔ αντίστοιχα $\Rightarrow MK // \frac{AD}{2}$

Στο τρίγωνο ΑΓΔ : Λ, Ν μέσα ΑΓ, ΓΔ αντίστοιχα $\Rightarrow \Lambda N // \frac{AD}{2}$

$M\Lambda N K = \text{παραλληλόγραμμο}$

Κ,Λ μέσα διαγωνίων τραπέζιου ΑΒΓΔ $\Rightarrow K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \quad (4)$

Από (3),(4) $\Rightarrow MN = K\Lambda$

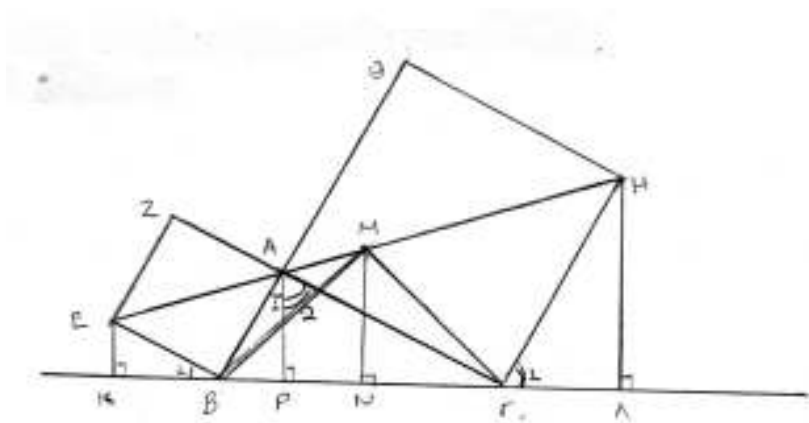
Άρα ΜΛΝΚ παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους $\Rightarrow M\Lambda N K = \text{ορθογώνιο}$

Άσκηση 2^η

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Κατασκευάζουμε έξω από αυτό τα τετράγωνα $ABEZ$ και $A\Gamma H\Theta$. Αν $EK \perp B\Gamma$, $H\Lambda \perp B\Gamma$ και M το μέσο της EH , να δείξετε ότι:

- $KB = \Lambda\Gamma$
- $EK + H\Lambda = B\Gamma$
- Τα σημεία E, A, H είναι συνευθειακά.
- $\widehat{BM\Gamma} = 90^\circ$

Λύση:



- Φέρνουμε AP ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα:

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} \text{i) } AB = EB \text{ (πλευρές τετραγώνου)} \\ \text{ii) } \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \text{ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)} \\ \text{iii) } \hat{P} = \hat{K} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ίσα} \Rightarrow \begin{array}{l} EK = BP \\ KB = AP \end{array} \quad (1)$$

$$\beta) \left. \begin{array}{l} \text{i) } A\Gamma = H\Gamma \text{ (πλευρές τετραγώνου)} \\ \text{ii) } \hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_2 \text{ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)} \\ \text{iii) } \hat{\Lambda} = \hat{P} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ίσα} \Rightarrow \begin{array}{l} H\Lambda = P\Gamma \\ \Gamma\Lambda = AP \end{array} \quad (2)$$

Από (1), (2) $KB - \Lambda\Gamma$

- Από (1), (2) $EK + H\Lambda = BP + P\Gamma = B\Gamma$
- AE, AH διαγώνιοι των τετραγώνων $ABEZ, A\Gamma H\Theta$ που διχοτομούν τις γωνίες οπότε :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{EAB} = 45^\circ = \hat{HAG} \\ \hat{BAG} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{EAH} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow E, A, H \text{ συνευθειακά}$$
- $EK, H\Lambda \perp B\Gamma \Rightarrow EK // H\Lambda \Rightarrow EHK\Lambda = \text{τραπέζιο}$

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ μέσο } HE \\ MN \perp K\Lambda \end{array} \right\} \Rightarrow MN \text{ διάμεσος τραπέζιου} \Rightarrow MN = \frac{EK + H\Lambda}{2} \Rightarrow \text{από (ii)} MN = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow$$

ΒΜΓ τρίγωνο ορθογώνιο και $\widehat{ΒΜΓ} = 90^\circ$.