

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1. Η εξίσωση $(\alpha-1)x = \alpha(\alpha-1) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = \alpha$.

Ψ: Εάν $\alpha-1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$, τότε η εξίσωση γράφεται $0x = 0$ και έχει άπειρες λύσεις.

2. Η εξίσωση $(|x|+1)(|x|+2) = 0$ είναι αδύνατη.

Α: $|x|+1 > 0$ και $|x|+2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $(|x|+1)(|x|+2) > 0$.

3. Η εξίσωση $(|x|-1)(|x|-2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Ψ: $(|x|-1)(|x|-2) = 0 \Leftrightarrow (|x|=1 \text{ ή } |x|=2) \Leftrightarrow (x = \pm 1 \text{ ή } x = \pm 2)$.

4. Η εξίσωση $(|x|-1)(|x|+2) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Α: $(|x|-1)(|x|+2) = 0 \Leftrightarrow (|x|-1 = 0 \text{ ή } |x|+2 = 0) \Leftrightarrow (|x|=1 \text{ ή } |x|=-2)$

$\Leftrightarrow (x = \pm 1 \text{ ή } |x| = -2, \text{ αδύνατη}) \Leftrightarrow x = \pm 1$.

5. Η εξίσωση $|x| = x-2$ έχει μοναδική λύση.

Ψ: $|x| \geq 0$, άρα $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Για $x \geq 2$ η εξίσωση γράφεται $x = x-2 \Leftrightarrow 0x = -2$ και είναι αδύνατη.

6. Η εξίσωση $|x| = 2-x$ έχει μοναδική λύση.

Α: $|x| \geq 0$, άρα $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

- Για $0 \leq x \leq 2$ η εξίσωση γράφεται $x = 2-x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
- Για $x < 0$ η εξίσωση γράφεται $-x = 2-x \Leftrightarrow 0x = 2$ και είναι αδύνατη.

7. Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

Α: α, γ ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha\gamma < 0$, οπότε $\Delta = b^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

8. Αν δύο εξισώσεις 2^{ου} βαθμού έχουν ίδιες ρίζες, τότε οι συντελεστές των ομοίων δυνάμεων του x είναι ίσοι.

Ψ: Οι εξισώσεις $x^2 - 5x + 6 = 0$ και $2x^2 - 10x + 12 = 0$ έχουν ίσες ρίζες (2, 3).

9. Η εξίσωση $ax^2 + 2x - a = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Ψ: Εάν $a = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $0x^2 + 2x - 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

10. Η εξίσωση $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$, με $a \neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Ψ: $\Delta = (-4a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4a^2 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

11. Η εξίσωση $\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2 = 0$, με $\alpha \neq 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες.

A: $\Delta = (-2\alpha)^2 - 4 \cdot \alpha^2 \cdot 2 = 4\alpha^2 - 8\alpha^2 = -4\alpha^2 < 0$.

12. Η εξίσωση $2x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Ψ: $\Delta = (3\alpha)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \alpha^2 = 9\alpha^2 - 8\alpha^2 = \alpha^2 \geq 0$.

13. Η εξίσωση $x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1 = 0$, με $\alpha \neq 0, 1$ έχει δύο πραγματικές ρίζες άνισες και αντίστροφες.

Ψ: Εάν $\alpha = -1$, τότε η εξίσωση γράφεται $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (διπλή).

14. Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Ψ: Η πρώτη εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $x = 2$ (αφού $x \neq 1$), ενώ η δεύτερη έχει λύσεις τις $x = 1$ και $x = 2$.

15. Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 5$ και $(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Ψ: Η πρώτη εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $x = 2$ (αφού $x \neq -1$), ενώ η δεύτερη έχει λύσεις τις $x = -1$ και $x = 2$.

16. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y με άθροισμα $S = -10$ και γινόμενο $P = 16$.

A: Οι αριθμοί -2 και -8 (οι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2 + 10\omega + 16 = 0$).

17. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y με άθροισμα $S = 10$ και γινόμενο $P = 25$.

A: Οι αριθμοί 5 και 5 (οι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2 - 10\omega + 25 = 0$).

18. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y με άθροισμα $S = 2$ και γινόμενο $P = 2$.

Ψ: Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί, θα ήταν λύσεις της εξίσωσης $\omega^2 - 2\omega + 2 = 0$.

Όμως η εξίσωση αυτή έχει $\Delta = -4 < 0$ και συνεπώς είναι αδύνατη.

II. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η εξίσωση $(2x-1)(x+2) = (3-2x)(x+2)$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(2x-1)(x+2) = (3-2x)(x+2) \Leftrightarrow 2x-1 = 3-2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$$

Όμως και ο αριθμός $x = -2$ επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.

Απάντηση:

Διαγραφή του παράγοντα $x+2$ ο οποίος μηδενίζεται για $x = -2$.

2. Η εξίσωση $|2x-1| = x-2$ γράφεται ισοδύναμα:

$$|2x-1| = x-2 \Leftrightarrow 2x-1 = x-2 \text{ ή } 2x-1 = 2-x \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1.$$

Όμως καμία από τις τιμές αυτές του x δεν επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.

Απάντηση:

Τα αναγραφόμενα ισχύουν αν $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Συνεπώς οι λύσεις $x = -1$ και $x = 1$ απορρίπτονται.