Όνομα: Ζωή

Επώνυμο: Παπαευαγγέλου

Τάξη: Β

Τμήμα: 2

Μάθημα:

απόλυτο
εκπαιδευτικός οργανισμός

Βαθμός Α' Διορθωτή:

Βαθμός Β' Διορθωτή:

Τελικός Βαθμός: 95/100

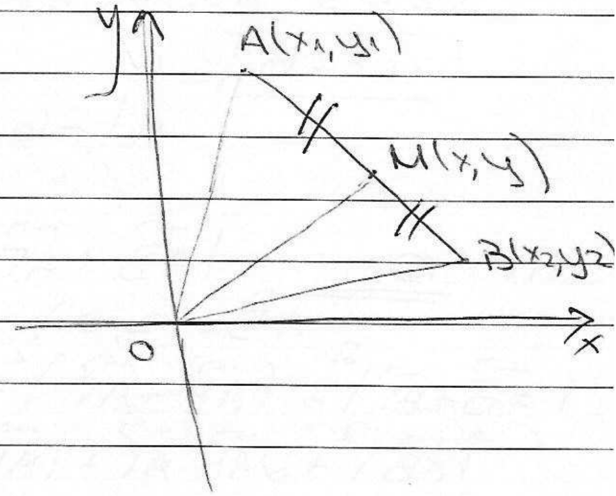
Θέμα 1ο 22/25

Α) Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ονομάζουμε το γινόμενο των μέτρων τους επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$$ ✓

· $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

Β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2+y_1y_2$ ✓



ii) $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$ ✓

$(x,y)=\frac{1}{2}[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]$ ✓

$(x,y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ✓

άρα $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ ✓

Γ) i) Λ ✓

ii) Σ ✓

iii) ~~Λ~~ Σ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0 \Leftrightarrow συν(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})>0$, άρα $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\in(0,\frac{\pi}{2})$

iv) Λ ✓

v) Σ ✓

Θεμα 2ο 23/25

$B(-4,2)$, $\Gamma(-6,4)$, $M(-5,3)$ και A ώστε $\vec{AM}=(1$

i) ΝΔΟ Μ μέσο ΒΓ

$\text{Μέσο}_{B\Gamma} = \left(\frac{-4-6}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (-5,3) \equiv M$ V

ii) $\vec{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A)$
$(1,1) = (-5-x_A, 3-y_A)$

$1 = -5 - x_A$ $\quad$ $1 = 3 - y_A$
$\boxed{x_A = -6}$ V $\quad$ $\boxed{y_A = 2}$ V
$A(-6,2)$

iii) ΘΝΥ $|\vec{AB}+\vec{A\Gamma}|$
$\vec{AB} = (2,0)$ $\quad$ $\vec{A\Gamma} = (0,2)$
$|\vec{AB}+\vec{A\Gamma}|^2 = (\vec{AB}+\vec{A\Gamma})^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} + \vec{A\Gamma}^2 =$
$|\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} + |\vec{A\Gamma}|^2 = \sqrt{2^2+0^2}^2 + 2\cancel{(2\cdot 0+0\cdot 2)} + \sqrt{0^2+2^2}^2$
$4+4=8$ V
$|\vec{AB}+\vec{A\Gamma}| = \cancel{4}\ \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

iv) ΝΔΟ $\hat{AB\Gamma}$ ορθ. κ ισοσκελές $\perp \hat{AB\Gamma}$
$\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma} = (2\cdot 0 + 0\cdot 2) = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{A\Gamma} \Rightarrow \hat{AB\Gamma}$ ορθ.

$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2+0^2} = \sqrt{4} = 2$ V
$|\vec{A\Gamma}| = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2$ V
$\Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{A\Gamma}| \Rightarrow (AB) = (A\Gamma)$ άρα $\hat{AB\Gamma}$ ισοσκ.

Θέμα 3^o 25/25

A) α) Έστω κ, λ ώστε $\kappa \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$, νδο $\kappa = \lambda = 0$

Έστω ~~κ, λ ≠ 0~~ $\kappa \neq 0$ (ή $\lambda \neq 0$)

$$\kappa \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u} \Rightarrow$$
$$\vec{v} = \frac{\lambda}{\kappa} \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{u} \text{ άτοπο}$$

άρα $\kappa = \lambda = 0$ V

b) i) αν $(\vec{v} \cdot \vec{u} - |\vec{v}|)\vec{v} = (3|\vec{u}| - 2\sqrt{3})\vec{u}$

θυν $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$

αφού $\vec{v}, \vec{u}$ μη συγγραμμικά

από (α)

$\vec{v} \cdot \vec{u} - |\vec{v}| = 0$ και $3|\vec{u}| - 2\sqrt{3} = 0$ V

$$3|\vec{u}| - 2\sqrt{3} = 0$$
$$|\vec{u}| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \checkmark$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} - |\vec{v}| = 0$$
$$|\vec{v}||\vec{u}| \cdot \text{συν}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) - |\vec{v}| = 0$$
$$|\vec{v}|\left(|\vec{u}| \cdot \text{συν}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) - 1\right) = 0$$
$$|\vec{u}| \cdot \text{συν}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1$$
$$\text{συν}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{συν}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ V}$$

άρα $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30^\circ$ ✓

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cancel{\vec{u}}\cdot προβ_{\vec{v}}\vec{u} \overset{(α)}{\Leftrightarrow} |\vec{v}| = \vec{v}\cdot λ\cdot\vec{v} \Leftrightarrow |\vec{v}| = λ\vec{v}^2 \Leftrightarrow |\vec{v}| = λ|\vec{v}|^2$
$\overset{|\vec{v}|\neq 0}{\Leftrightarrow} λ = \frac{1}{|\vec{v}|} > 0$

ii) Ναι $προβ_{\vec{v}}\vec{u}$ είναι μοναδιαίο κ ομόρροπο του $\vec{v}$

$\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot προβ_{\vec{v}}\vec{u}$ ✓

$\cancel{|\vec{v}|}|\vec{u}|\cdot συν(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = \cancel{|\vec{v}|}\cdot|προβ_{\vec{v}}\vec{u}|\cdot συν(\widehat{\vec{v}, προβ_{\vec{v}}\vec{u}})$

$\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}} = |προβ_{\vec{v}}\vec{u}|\cdot συν(\widehat{\vec{v}, προβ_{\vec{v}}\vec{u}})$

$1 = |προβ_{\vec{v}}\vec{u}|\cdot συν(\widehat{\vec{v}, προβ_{\vec{v}}\vec{u}})\quad (1)$

✓

το διάνυσμα $προβ_{\vec{v}}\vec{u}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{v}$ και σχηματίζουν γωνία $0°$ ή $180°$. Από τη σχέση (1) το συνημίτονο της γωνίας τους είναι θετικό άρα σχηματίζουν γωνία $0°$ και είναι ομόρροπα. ✓

$(1) \Rightarrow 1 = |προβ_{\vec{v}}\vec{u}|\cdot συν0° \Rightarrow$

$|προβ_{\vec{v}}\vec{u}| = 1$ ✓

Β. $\vec{α} = (-1, 2)$ $\quad \vec{β}(4, 7)$

Έστω $\vec{β_1}, \vec{β_2}$ οι δύο συνιστώσες

όπου $\vec{β_1} \parallel \vec{α} \Rightarrow \vec{β_1} = λ\vec{α}$, $λ\in\mathbb{R}$ ✓

και $\vec{β_2} \perp \vec{α} \Rightarrow \vec{β_2}\cdot\vec{α} = 0$

Όνομα: Ζωή

Επώνυμο: Παπαναγγέλου

Τάξη:

Τμήμα:

Μάθημα:

απόλυτο εκπαιδευτικός οργανισμός

Βαθμός Α' Διορθωτή:

Βαθμός Β' Διορθωτή:

Τελικός Βαθμός:

$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = (-1,2)\cdot(4,7) = -4 + 14 = 10$

$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \vec{a}(\vec{\beta_1}+\vec{\beta_2}) = \vec{a}\cdot\vec{\beta_1} + \cancel{\vec{a}\cdot\vec{\beta_2}}^{\,0} = \vec{a}\cdot\lambda\cdot\vec{a} = \vec{a}^2\cdot\lambda$

$= |\vec{a}|^2\cdot\lambda = \sqrt{1+4}^{\,2} = 5\cdot\lambda$

$5\lambda = 10$

$\boxed{\lambda = 2} \Rightarrow \vec{\beta_1} = 2(-1,2)$

$\vec{\beta_1} = (-2,4)$ ✓

$\vec{\beta_2} = \vec{\beta} - \vec{\beta_1}$

$\vec{\beta_2} = (4,7) - (-2,4) = (6,3)$ ✓

Θέμα 4ο

25/25

$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{\beta}| = 3,\ \vec{a}\cdot\vec{\beta} = \frac{7}{3} \qquad 3\vec{a} + 2\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = \vec{0}$

i) $3\vec{a} + 2\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = \vec{0}$

$3\vec{OA} + 2\vec{OB} - 5\vec{O\Gamma} = \vec{0}$

$3\vec{OA} + 2(\vec{AB} - \vec{AO}) - 5(\vec{A\Gamma} - \vec{AO}) = \vec{0}$

$3\vec{OA} + 2\vec{AB} - 2\vec{AO} - 5\vec{A\Gamma} + 5\vec{AO} = \vec{0}$

$3\vec{OA} + 2\vec{AB} + \cancel{2\vec{OA}} - 5\vec{A\Gamma} - \cancel{5\vec{OA}} = \vec{0}$

$2\vec{AB} - 5\vec{A\Gamma} = \vec{0}$

$\vec{AB} = \frac{5}{2}\vec{A\Gamma} \Rightarrow$ A, B, Γ συνευθειακά ✓

απόλυτο
εκπαιδευτικός οργανισμός

ii) $\vec{AB} = \frac{5}{2}\vec{A\Gamma}$

$\vec{OB} - \vec{OA} = \frac{5}{2}(\vec{O\Gamma} - \vec{OA})$

$\vec{\beta} - \vec{\alpha} = \frac{5}{2}\vec{\gamma} - \frac{5}{2}\vec{\alpha}$

$\frac{5}{2}\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} + \frac{5}{2}\vec{\alpha}$

$\frac{5}{2}\vec{\gamma} = \vec{\beta} + \frac{3}{2}\vec{\alpha}$

$\frac{5}{2}\vec{\gamma} = \frac{2\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}}{2}$

$\vec{\gamma} = \frac{2\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}}{5}$

$3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = \vec{0}$

$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}}{5}}$

$|\vec{\gamma}|^2 = \left|\frac{2\beta + 3\alpha}{5}\right|^2 = \left(\frac{2\beta + 3\alpha}{5}\right)^2 =$

$\frac{4|\vec{\beta}|^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9|\vec{\alpha}|^2}{25} = \frac{4\cdot 9 + \cancel{12}^{4}\cdot\frac{7}{\cancel{3}} + 9\cdot 4}{25} =$

$\frac{36 + 28 + 36}{25} = \frac{100}{25} = 4$

$\boxed{|\vec{\gamma}| = 2}$

απόλυτο
εκπαιδευτικός οργανισμός

iii) Ναο ΟΓ διχοτομει $A\hat{O}B$

~~αναο~~ $\cancel{\vec{a}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}}$

$\cancel{|\vec{a}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot συν(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}}) = |\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot συν(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}})}$

$\cancel{2\cdot 2\cdot συν(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}}) = 2\cdot 3\cdot συν(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}})}$

$\cancel{4συν(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}}) = 6συν(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}})}$

αναο $συν(\widehat{\vec{a},\vec{\gamma}}) = συν(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}})$ ✓

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{a}||\vec{\gamma}|} = \frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\beta}|} \quad (1)$$

$$\vec{\beta} = \frac{5\vec{\gamma}-3\vec{a}}{2}$$

$$|\vec{\beta}|^2 = \left|\frac{5\vec{\gamma}-3\vec{a}}{2}\right| = \frac{(5\vec{\gamma}-3\vec{a})^2}{4}$$

$$36 = (5\vec{\gamma}-3\vec{a})^2$$

$$36 = 25\vec{\gamma}^2 - 30\vec{a}\cdot\vec{\gamma} + 9|\vec{a}|^2$$

$$36 = 100 - 30\vec{a}\cdot\vec{\gamma} + 36$$

$$30\vec{a}\cdot\vec{\gamma} = 100$$

$$\boxed{\vec{a}\vec{\gamma} = \frac{10}{3}}$$

$$\vec{a} = \frac{5\vec{\gamma}-2\vec{\beta}}{3} \Rightarrow |\vec{a}|^2 = \frac{(5\vec{\gamma}-2\vec{\beta})^2}{9} \Rightarrow 36 = (5\vec{\gamma}-2\vec{\beta})^2$$

$$36 = 5\cdot\vec{\gamma}^2 - 20\vec{\beta}\vec{\gamma} + 4\vec{\beta}^2 \Rightarrow 36 = 25\cdot 4 - 20\vec{\beta}\vec{\gamma} + 4\cdot\cancel{9}$$

$$20\vec{\beta}\vec{\gamma} = 100$$

$$\boxed{\vec{\beta}\vec{\gamma} = 5}$$

(1) $\dfrac{\frac{10}{3}}{2} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$ $\underline{\text{ισχύει}}$

iv) Ναι $\vec{v} = 4\vec{a} + \vec{\beta} \perp \vec{AB}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{\beta} - \vec{a}$

αρα $(4\vec{a} + \vec{\beta})(\vec{\beta} - \vec{a}) = 0$

$(4\vec{a} + \vec{\beta})(\vec{\beta} - \vec{a}) = 4\vec{a}\vec{\beta} - 4|\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - a\beta$

$3a\beta - 4|\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = 3 \cdot \frac{7}{3} - 16 + 9 = 0$