ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ
Ι

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

Ερώτηση 1
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

Απάντηση: Αληθής
Αν $f(0) = f(1)$ σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπάρχει
$x_0 \in (0,1)$: $f'(x_0) = 0$ ΑΤΟΠΟ

Ερώτηση 2
Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$.

Απάντηση: Αληθής
Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει
$x_0 \in (\alpha, \beta)$: $f'(x_0) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < 0$

Ερώτηση 3
Αν οι f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

Απάντηση: Αληθής
Θεωρώντας $h(x) = f(x) - g(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta): h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$ $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Ερώτηση 4
Αν $f'(x) = (x-1)^2 \cdot (x-2)$ για κάθε $x \in \Re$, τότε:
α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Απάντηση: α) Ψευδής, β) Αληθής

x	$-\infty$ … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+
$x-2$	-	-	+
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	↘	↘	↗

T.E.
$f(2)$

Ερώτηση 5
α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

Απάντηση: α) Αληθής, β) Ψευδής
α)Αφού η $f'(x)$ θα είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού
και θα έχει οπωσδήποτε μια πραγματική ρίζα.

β)Αφού η $f'(x)$ θα είναι πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού
οπότε μπορεί να μην έχει πραγματική ρίζα.

Ερώτηση 6
Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

Απάντηση: Αληθής

$$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$$
$$f''(x)=6\alpha x+2\beta$$
$$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{2\beta}{6\alpha}=-\frac{\beta}{3\alpha}$$

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ: 210.6218.894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος &Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, **14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ**

x	$-\infty$	$-\dfrac{\beta}{3\alpha}$	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$		Σ.Κ.	

Ερώτηση 7

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

Απάντηση: Ψευδής

Προφανώς π.χ. $f(x) = x^3$ $g(x) = -x^3$ $h(x) = -x^6$

Ερώτηση 8

Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\Re$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Απάντηση: Αληθής

Αφού η απόσταση της C_f από τον $x'x$ εκφράζεται από την $f(x)$ και παρουσιάζει σε κάποιο x_0 ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ οριζόντια εφαπτόμενη.

Ερώτηση 9

Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

β) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ: 210.6218.894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος &Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, **14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ**

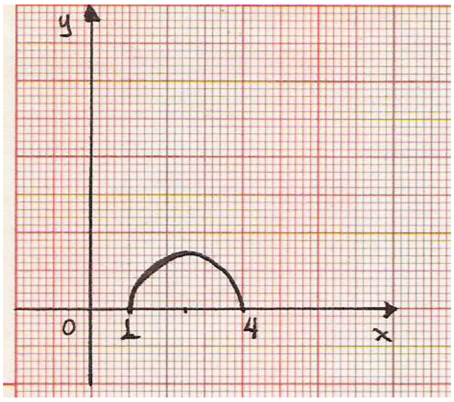
<u>Απάντηση:</u> α) Ψευδής, β) Αληθής

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x-1)}=-1$

β) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x-1)^2}=-\infty$

<u>Ερώτηση 10</u>

Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



i. το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$
ii. το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$
iii. $f'(x)\rangle 0$ για κάθε $x\in(1,4)$
iv. υπάρχει $x_0\in(1,4)$: $f'(x_0)=0$

<u>Απάντηση:</u> i) Ψευδής, ii) Ψευδής, iii) Ψευδής, iv) Αληθής

i) Προφανώς υπάρχει $x_0\in(1,4)$: $f'(x_0)=0$

ii) Ομοίως

iii) Αφού η f δεν είναι $\uparrow$ στο $[1,4]$

iv) Από το (i) (Θεώρημα Rolle για την f στο $[1,4]$

<u>Ερώτηση 11</u>

Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$ έχει:

α) μια, τουλάχιστον, ρίζα στο (0,1)

β) μια, ακριβώς, ρίζα στο (-1,0)

γ) τρεις πραγματικές ρίζες

Απάντηση: α) Ψευδής, β) Αληθής γ) Ψευδής

α) Αφού $f'(x)=3x^2+1\rangle 0$ δηλαδή η $f\uparrow$ οπότε το
Σ.Τ.$=[f(0),f(1)]=[1,3]$

β) Αφού από το Θεώρημα Bolzano έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$ και επειδή η $f\uparrow$ αυτή είναι μοναδική.

γ) Αφού η $f\uparrow$ από το (β) θα έχει μια μόνο ρίζα.

Ερώτηση 12

Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\Re$ συναρτήσεις f,g ισχύουν $f(0)=4, f'(0)=3$, $f'(5)=6, g(0)=5, g'(0)=1, g'(4)=2$, τότε $(f\circ g)'(0)=(g\circ f)'=(0)$

Απάντηση: Αληθής

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$[g(f(x))]' = g'(f(x))\cdot f'(x)$

$(f\circ g)'(0)=f'(g(0))\cdot g'(0)=f'(5)\cdot 1=6\cdot 1=6$

$(g\circ f)'(0)=g'(f(0))\cdot f'(0)=g'(4)\cdot 3=2\cdot 3=6$

II

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

Ερώτηση 1

Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

Α) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Β) $\dfrac{4}{3}$ Γ) $\sqrt{3}$ Δ) 0 Ε) $\dfrac{3}{4}$

Απάντηση: (Β)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(x)=\varepsilon\varphi x,\ f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

Ερώτηση 2

Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α) $\dfrac{1}{x^2}$ Β) $-\dfrac{2}{x^2}$ Γ) $-\dfrac{1}{x^2}$ Δ) $-\dfrac{2}{x}$ Ε) 0

Απάντηση: (Γ)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Ερώτηση 3

Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α) $3x5^{3x-1}$ Β) $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ Γ) $3\cdot 5^{2x}$ Δ) $3\cdot 5^{3x}$ Ε) $5^{3x}\ln 125$

Απάντηση: (Ε)

$$f'(x)=\left(5^{3x}\right)'=5^{3x}\cdot\ln 5\cdot(3x)'=5^{3x}\cdot 3\ln 5$$
$$=5^{3x}\cdot\ln 5^3=5^{3x}\cdot\ln 125.$$

Ερώτηση 4

Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$ τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

Α) $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ Β) $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Γ) $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ Δ) $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Απάντηση: (Γ)

$$f'(x)=\left[\sigma\upsilon\nu^3(x+1)\right]'=3\sigma\upsilon\nu^2(x+1)\cdot(-\eta\mu(x+1))$$
$$f'(\pi)=-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\cdot\eta\mu(\pi+1)$$

Ερώτηση 5

Αν $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α) 1 Β) -1 Γ) 0 Δ) 27 Ε) δεν υπάρχει

Απάντηση: (Γ)

$f^{(7)}(x)=0$ αφού $f(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση $6^{ου}$ βαθμού.

Ερώτηση 6

Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ Γ) $\frac{1}{2}$ Δ) 1 Ε) 2

Απάντηση: (Γ)

$$f'(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=4x_0 \Leftrightarrow$$

$$x_0{}^2=\frac{1}{4}\xrightarrow{x_0>0}x_0=\frac{1}{2}.$$

Ερώτηση 7

Αν $f(x)=e^{\beta x}, g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f(x)}{g(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

A) $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ B) $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ Γ) $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$ Δ) $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ Ε) $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$

Απάντηση: (Ε)

$$\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}=\frac{f'(x)}{g'(x)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta\cdot e^{\beta x}\cdot e^{\alpha x}-\alpha\cdot e^{\alpha x}\cdot e^{\beta x}}{(e^{\alpha x})^2}=\frac{\beta\cdot e^{\beta x}}{\alpha\cdot e^{\alpha x}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\beta x}\cdot e^{\alpha x}(\beta-\alpha)}{e^{\alpha x}}=\frac{\beta\cdot e^{\beta x}}{\alpha}$$

$$\alpha\cdot(\beta-\alpha)=\beta\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta-\alpha^2=\beta\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)\cdot\beta=\alpha^2\Leftrightarrow\beta=\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$$

Ερώτηση 8

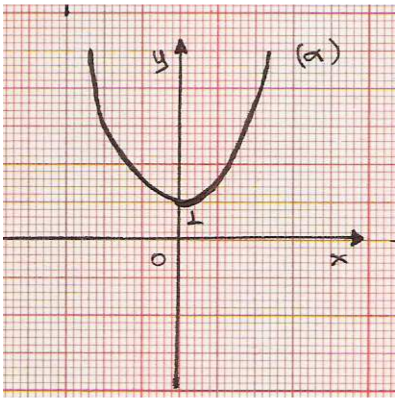
Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε:

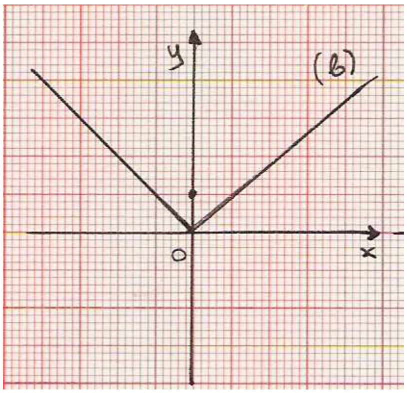
A) $f(1)=-1$ B) $f(-1)>0$ Γ) $f(1)>0$ Δ) $f(-1)=0$

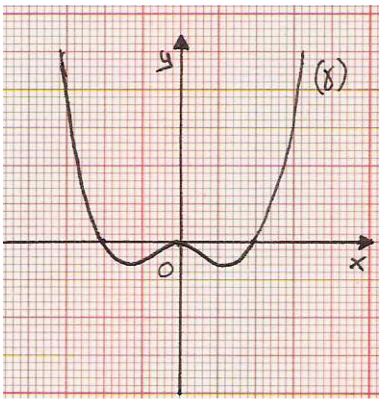
<u>Απάντηση:</u> (Γ)
Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. στα $[-1,0],[1,0]$ για την f οπότε υπάρχουν
$\xi_1 \in (-1,0), \xi_2 \in (0,1)$
$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)},\ f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$
$\Leftrightarrow f'(\xi_1)=-f(-1),\ f'(\xi_2)=f(1)$
αφού $f'(x)>0, x\in(-1,1)$ τότε $-f(-1)>0,\ f(1)>0 \Leftrightarrow$
$f(-1)<0,\ f(1)>0.$

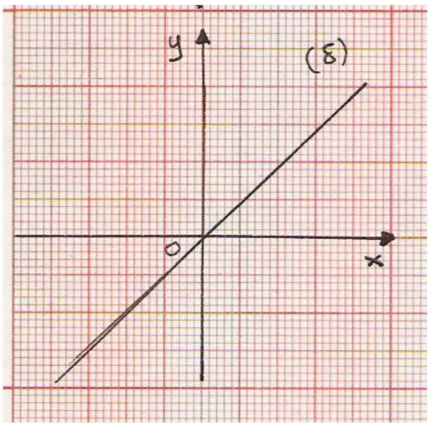
III

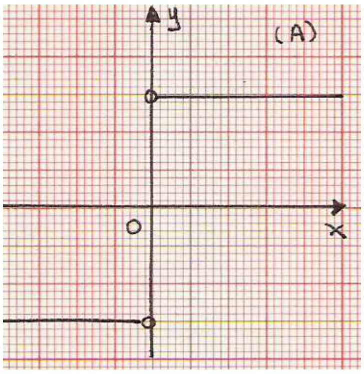
1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α,β,γ,δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.

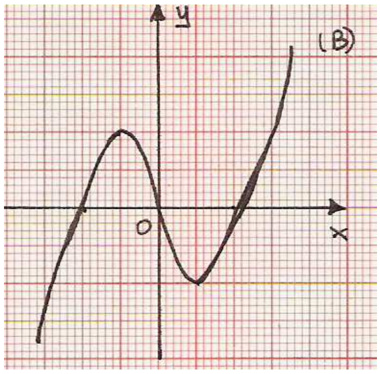


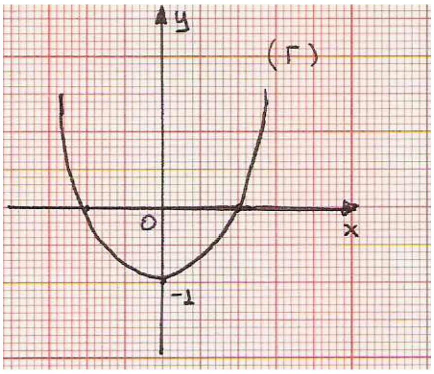


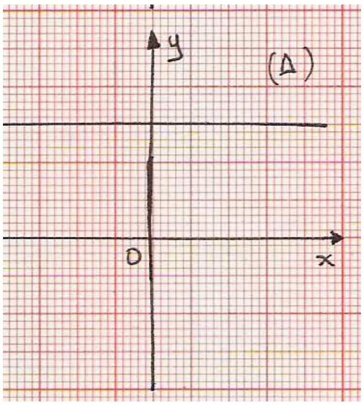


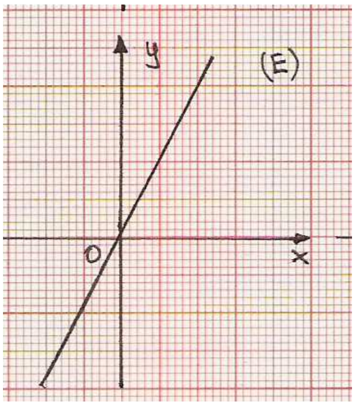


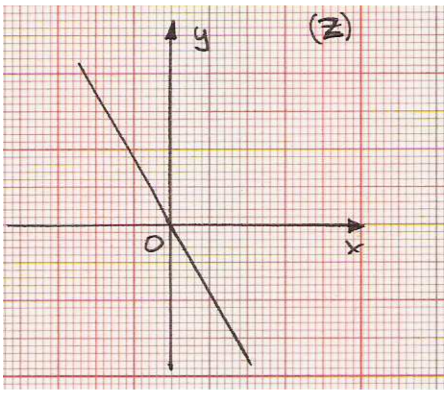












$\alpha \rightarrow (\mathrm{E})$
$\beta \rightarrow (\mathrm{A})$
$\gamma \rightarrow (\mathrm{B})$
$\delta \rightarrow (\Delta)$

Τηλ./Fax: 210.62.19.712, Τηλ: 210.6218.894 www.apolito.gr – e-mail:info@apolito.gr
Λεωφόρος Μαραθώνος &Χρυσοστόμου Σμύρνης 3, **14565 ΑΓΙΟΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ**

2. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	**ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ**
1. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$	Α. $y=2$
2. $f(x)=-x+1\frac{1}{e^x}$	Β. $y=x-1$
3. $f(x)=2+\frac{3}{x-2}$	Γ. $y=-x+1$
	Δ. $y=x$
	Ε. $y=-x$

<u>Απάντηση</u>

1. $\to (\Delta)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=1=\lambda$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}-x\right)=0=\beta$$

$$y=x$$

2. $\to (\Gamma)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\cdot e^x}\right)=-1+0+0=-1=\lambda$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x+1+\frac{1}{e^x}-(-1)\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$$

1+0=1= β

$$y=-x+1$$

3. $\to (\mathrm{A})$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x-2}\right)=2+0=2$

$$y=2$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΜΠΑΤΖΑΚΑΣ ΜΙΧΑΛΗΣ
ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ